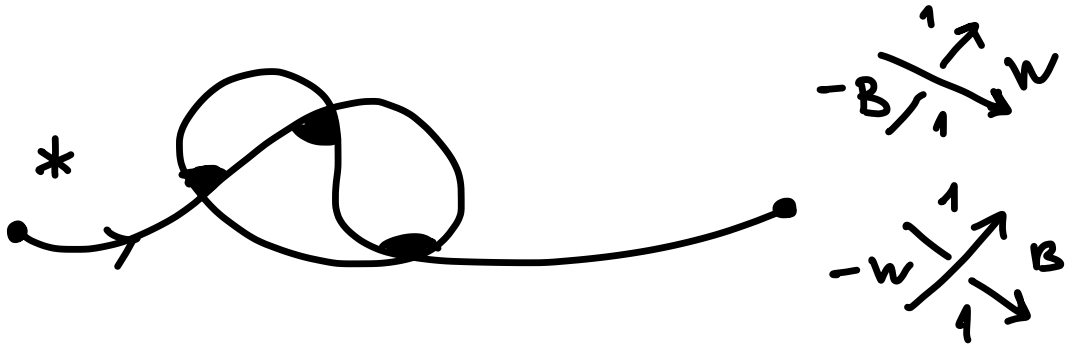
İşaretli Faz Toplamları ve Alexander Polinomunun Genellemeleri

Neslihan Gügümcü (İYTE)
&
Louis H. Kauffman (UIC)

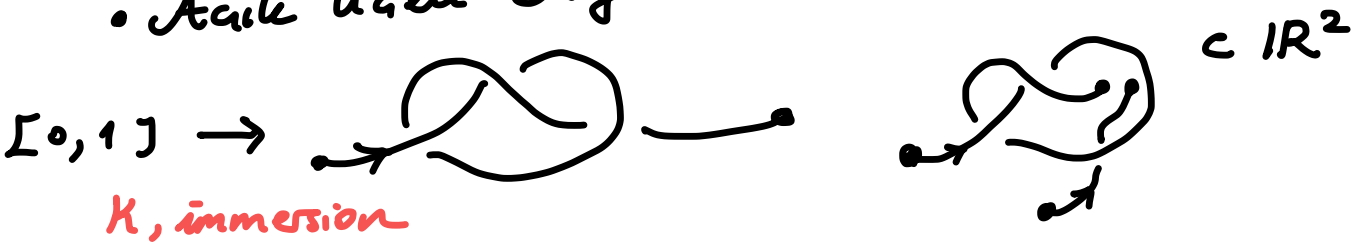


Düğümler

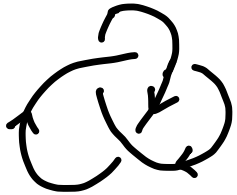
- $\mathbb{R}^3$'deki düğümler

- Kapalı, bağlantılı, yönlendirilebilir yüzeylerdeki düğümler

- Açık uçlu düğümler (Knotoidler, Turaev 2012)



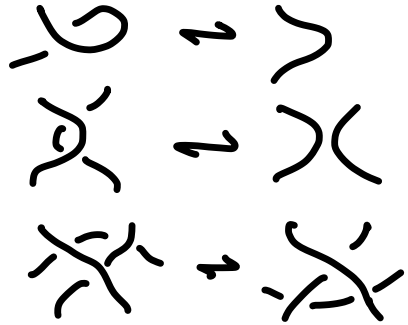
K



$\subset \mathbb{R}^2$

trefoil düğümü diyagramı

Reidemeister Hareketleri

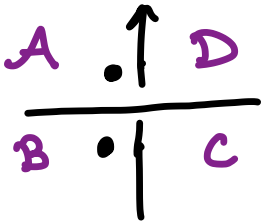


Reidemeister Teoremi (1927)

K_1, K_2 düzlemde iki düğüm diyagramı olsun. K_1 ve K_2'nin, $\mathbb{R}^3$'de aynı düğümü temsil etmesinin yeterli ve gerekli koşulu, birbirlerine Reidemeister hareketleri ile dönüştürülebilir olmasıdır.

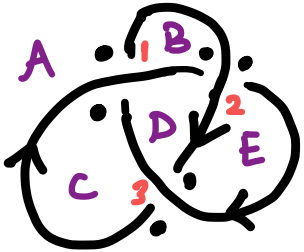
Alexander Polinomu'na bir giriş

J.W. Alexander
(TAMS, 1928)



$\rightsquigarrow \quad Ax + Bx + C + D = 0$

K :



① $Ax + Cx + B + D = 0$

② $Ax + Bx + D + E = 0$

③ $Ax + Ex + C + D = 0$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x & 1 & x & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 & x \end{bmatrix} \end{array}$$

iptal et!

$\mathcal{M}(K)$

$\rightsquigarrow \pm x^n, n \in \mathbb{Z}$

$$\Delta_K(x) \doteq \mathrm{Det}(\mathcal{M}(K)).$$

$$\doteq x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\doteq x^2 - x + 1 .$$

Teorem : Alexander polinomu bir düğüm invaryantıdır.

Teorem : $\Delta_K(x) = \Delta_K(x^{-1})$.

Tanım : M $n \times n$ kare bir matris olsun.

$$\mathrm{Det}(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} .$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
\hline
1 & x & 1 & x & 1 & 0 \\
2 & x & x & 0 & 1 & 1 \\
3 & x & 0 & 1 & 1 & x
\end{array}
$$

iptal et!

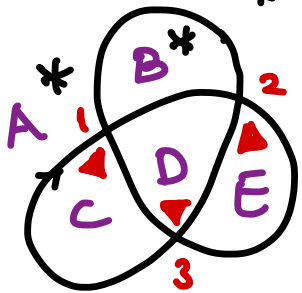
$x.1.1$

$\updownarrow$

C 1'i

D 3'ü

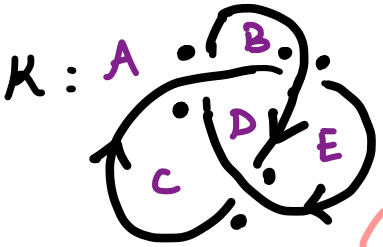
E 2'yi seçer.

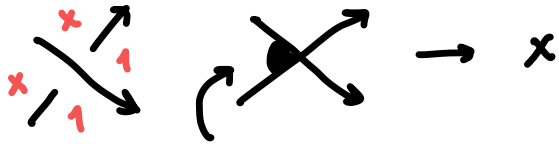


* : iptal edilen bölgeler

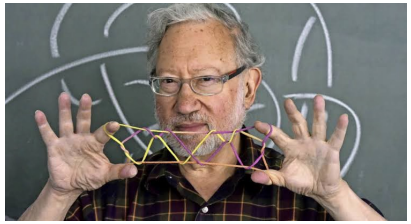
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Det}(M(K))\text{'deki} \\ 0\text{'dan farklı} \\ \quad \text{terimler} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} K\text{'nın bölgelerinin komşu} \\ \text{kavşaklarını seçmi.} \\ \\ \text{Her bir kavşaklama noktası} \\ \text{sadece bir bölge tarafından} \\ \text{seçilir.} \end{array} \right\}$

Alexander Polinomunun faz-toplam formülü (FKT, Kauffman)



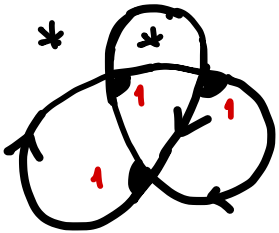


faz işareti

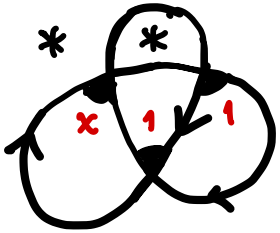


$$\boxed{\mathrm{sgn}(s) = (-1)^{\#\left(B \times\right)}}$$

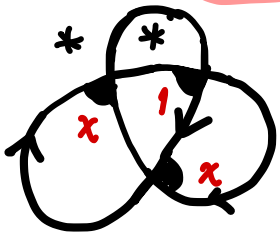
$$\boxed{\langle K|s\rangle = \prod_{i=1}^{n} c_i(x)}$$



1

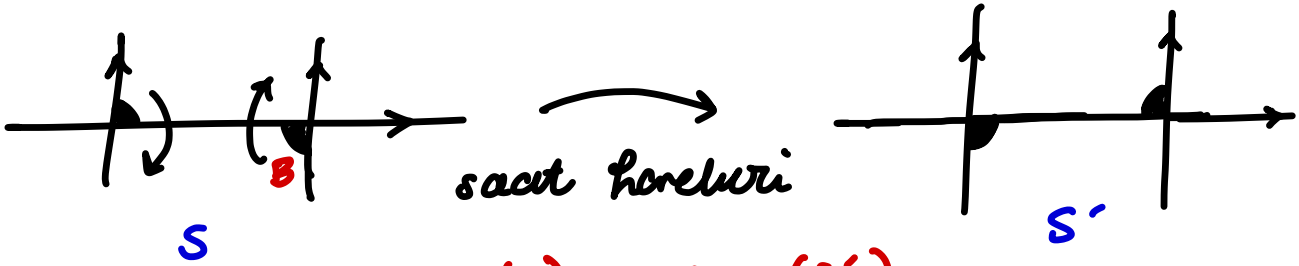


$-x$



$(-1)^2 x^2$

$\Rightarrow$ K'nın fazlarının ağırlıklarının işaretleri ile toplamı $x^2 - x + 1$ polinomunu verir!



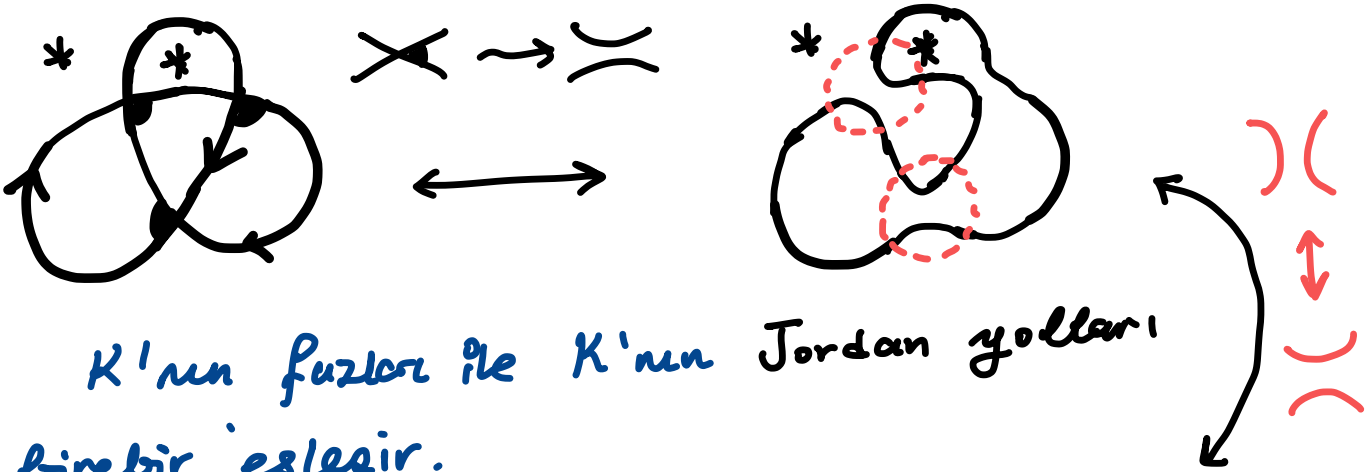
$$\mathrm{sgn}(S) = -\mathrm{sgn}(S')$$

Saat Teoremi (Kauffman, 1983)

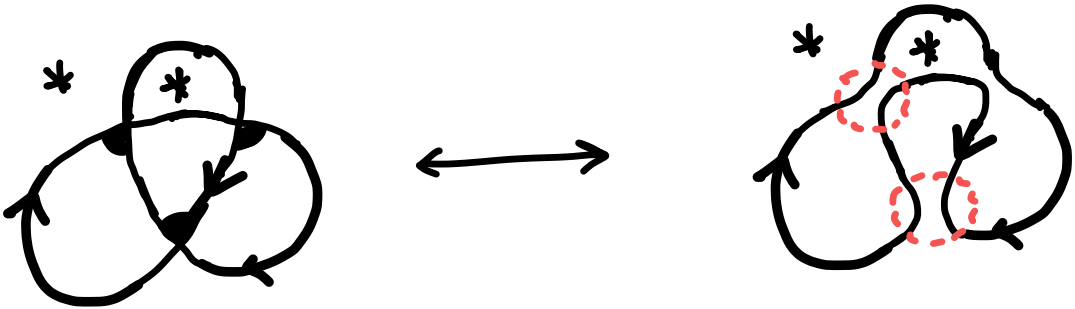
K, bir düğüm diyagramı olsun.

K'nın herhangi iki fazı birbiriyle saat hareketleri ile ilişkilidir. K'nın fazlarından her zaman iki tanesinde, sadece tek yönde saat hareketleri uygulanabilir. Böylece, K'nın fazları bir latis oluşturur.

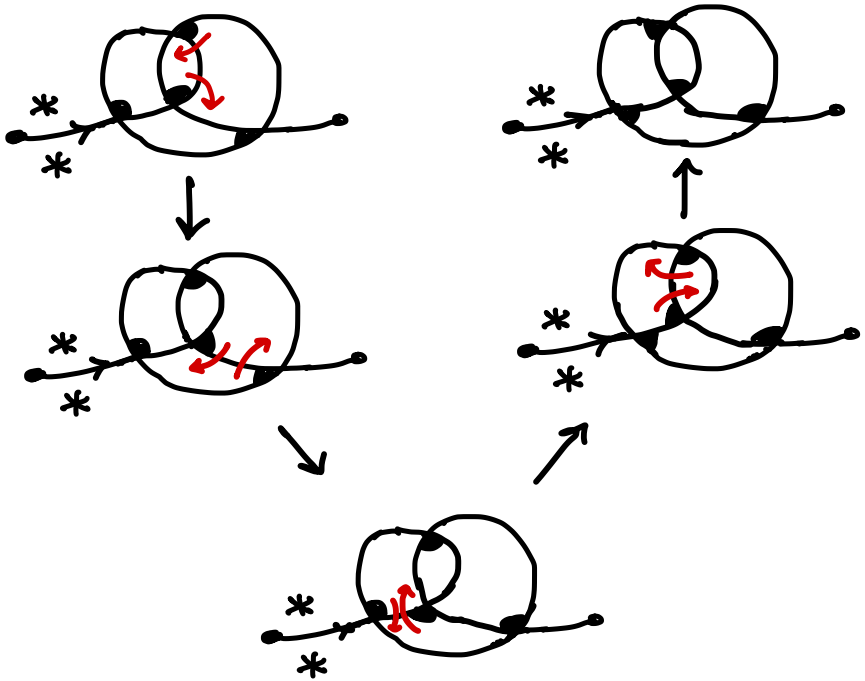
Giriş Teorisel Bozlenler



K'nın fuzlar ile K'nın Jordan yolları birebir eşleşir.



8-düğümünün faz latisi:



Sonuç:

$$\Delta_K(s) \doteq \sum_{s \in \mathcal{S}} \operatorname{sgn}(s) \langle K | s \rangle ,$$

$\mathcal{S} = \{ K$'nın tüm fazları $\}$.

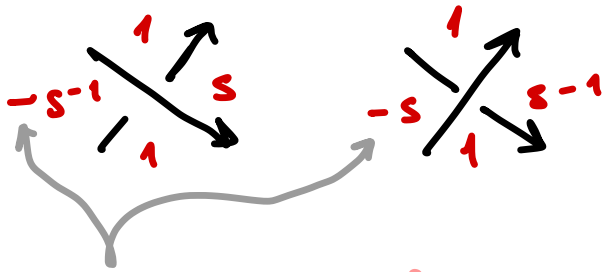
Sorular

1. Alexander polinomu faz-toplamında fazlanın işaretlerinden kurtulabilir miyiz?

2. Yıldızlı bölgeleri komşu bölgeler olarak seçmezsek ne olur?

3. Faz-toplamı fikrini knotoidlere ve yüzeylerdeki düğümlere nasıl genelleyebiliriz?

Lokal bölge etiketlerinin değişimi



Negatif etiketler, faz işaretlerini absorb eder.

$$\nabla_K(s) = \sum_{\sigma \in S} \langle K | \sigma \rangle .$$

Teorem:

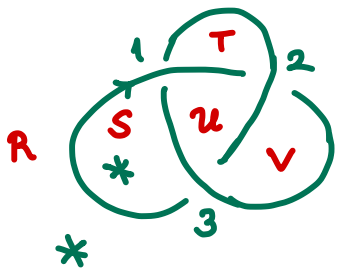
1. $\nabla_O(s) = 1$.

2. $\nabla_{\times} - \nabla_{\times} = z \nabla_{\asymp}$, $z = s - s^{-1}$.

$\Longrightarrow$ $\nabla_K(s)$, K'nın Alexander-Conway polinomu'dur.
(1969, John Conway)

Teorem (Kauffman): Alexander-Conway polinomu K'nın matrisinin permanent'ına eşittir.

$$\nabla_K(s) = \mathrm{Perm}(\mathcal{M}(K)) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} .$$



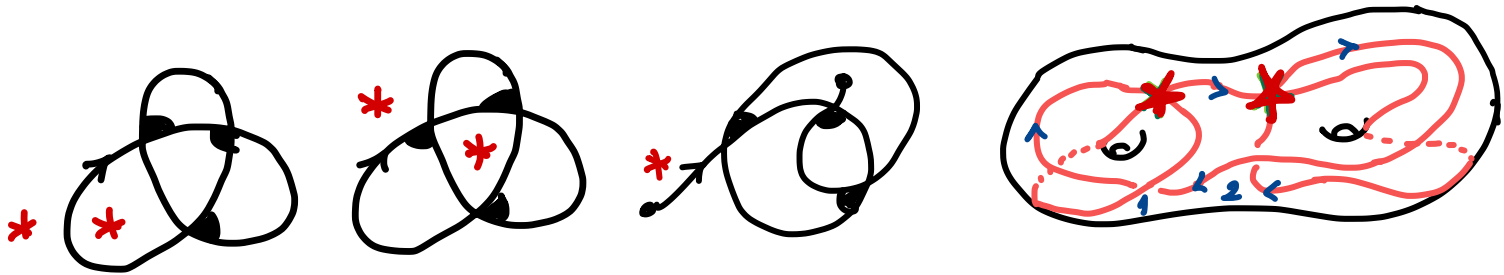
	R^*	S^*	T	u	V
1	1	$-s^{-1}$	s	1	0
2	1	0	$-s^{-1}$	1	s
3	1	s	0	1	$-s^{-1}$

$\mathcal{M}(K)$

$$\nabla_K(s) = \mathrm{Perm}\begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ -s^{-1} & 1 & s \\ 0 & 1 & -s^{-1} \end{bmatrix} = s(-s^{-1}+s) + (s^{-2})$$

$$= 1 + (s - s^{-1})^2 .$$

Alexander polinomu türevleri için bir tarif



1) Herhangi bir yıldızlı düğüm veya knotoid diyagramında

. yıldızsız bölgeler = # . yıldızsız kavşaklar

ise, bu diyagram üzerinde fazlar tanımlayabiliriz.

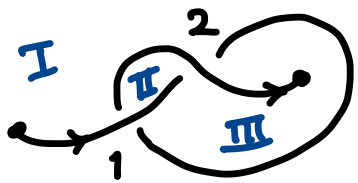
2) K'nın bir fazı, herbir yıldızsız bölgeyi tek bir yıldızsız bir kavşakla ilişkilendirir.

3) Bir fazın ağırlığı, faz işaretlerinin karşılık geldiği kavşak noktaları lokal etiketlerinin çarpımıdır.

4) Faz ağırlıklarını topla / K'nın matrisinin Permanent'ini hesapla.

Alexander Polinomunu knotoidlere nasıl genelleriz?

K :



bir bölgeyi iptal et $\Downarrow$

K^* :

$\Rightarrow n = f$.

Euler Formülü

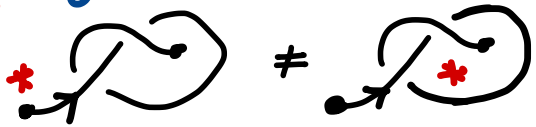
Γ, bağlantılı düzlemsel bir graf.

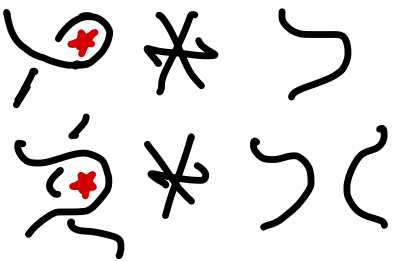
$$v - e + f = 2 .$$

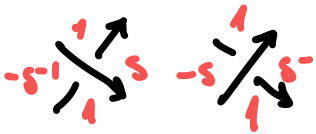
$\Rightarrow$ n tane kavşaksız olan bir knotoid için

$$f = n + 1 .$$

Yıldızlı knotoidler :







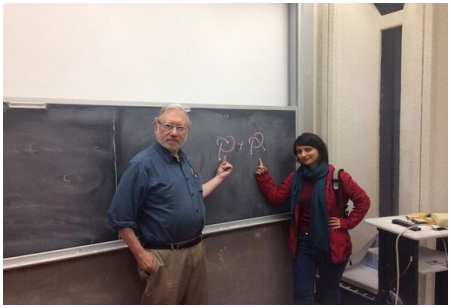
$\Downarrow$ Fox-toplamını yıldızlı knotoid üzerinde tanımla.

$$\nabla_{K^*}(s) = \sum_{\sigma \in f} \langle K^* | \sigma \rangle .$$

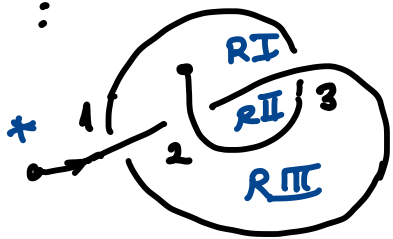
Teorem (Kauffman, G.)

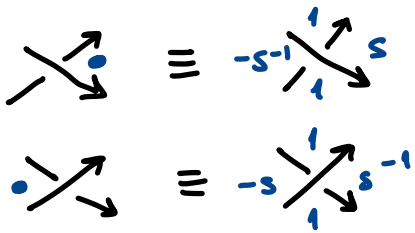
K^*, yıldızlı bir knotoid olsun.

$$\boxed{\nabla_{K^*}(s) = \mathrm{Perm}\,(\mathcal{M}(K^*)).}$$



K^* :



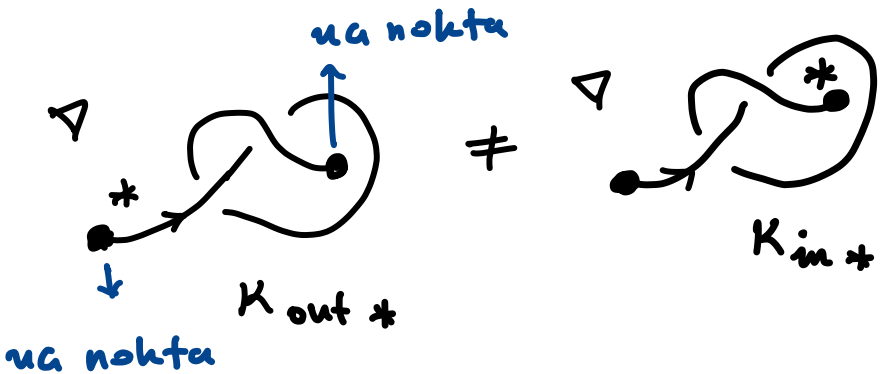


$\mathcal{M}(K^*) =$

	RI	RII	RIII
1	s	0	1
2	$1+s^{-1}$	1	s
3	s	1	s^{-1}

$$\Rightarrow \nabla_{K^*} = \mathrm{Perm}\,(\mathcal{M}(K^*))$$
$$= s\,(s^{-1}+s) + s^{-1} + 1 + s$$
$$= s^2 + s + 2 + s^{-1}.$$

Bir simetri gözlemi



$$\nabla_{K_{out*}}(s) = s^2 + s - s^{-1}.$$

$$\nabla_{K_{in*}}(s) = s^{-2} + s - s^{-1}.$$

Teorem (Kauffman, Moltmaker, G.)

K, S^2'de bir knotoid olsun.

K_{out*}, K'nın en dış bölgesinin yıldızlanması ile, K_{in*} ise, K'nın en iç bölgesinin yıldızlanması ile elde ettiğimiz knotoidler için şu sağlanır:

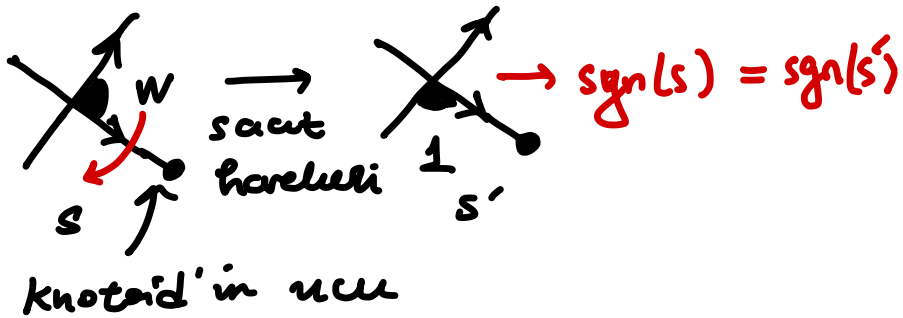
$$\nabla_{K_{out*}}(s) = \nabla_{K_{in*}}(-s^{-1}).$$

Knotoidler için saat teoremi (Kauffman, G.)

K^* yıldızlı bir knotoid olsun.
K^*'ın herhangi iki fazı birbirleri ile saat hareketleri ile ilişkilidir ve tüm fazlar bir latis oluştururlar.

Soru: $\nabla_{K^*}(s)$ polinomunu $\mathcal{M}(K^*)$ matrisinin determinantı ile elde edebilir miyiz?

Cevap: Hayır!



Örnek :

$$\boxed{\begin{array}{l} f=2 \\ r=2 \end{array}}$$

	R	S
1	s	$2-s^{-1}$
2	$-s^{-1}$	$2+s$

$$\Rightarrow \nabla_K = s^2+s^{-2}+2(s-s^{-1}).$$

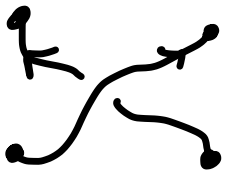
Teorem (Kauffman, G.) K, Σ_g'de $n>0$ tane kavşaklaşma noktası olan bir düğüm (veya link) ise

$$\boxed{f-n = 2-2g}$$ ' dir.

$\therefore$ Eğer K bir torus içindeyse, üzerinde direkt olarak fazlar tanımlanabilir.

Örnek :

$\mathcal{L}$:



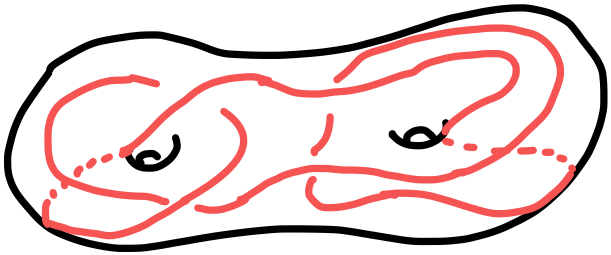
$$\boxed{\begin{array}{l} f=1 \\ n=1 \end{array}}$$

$$\nabla_{\mathcal{L}}(s) = s-s^{-1}+2.$$

Teorem (Kauffman, G.) K, Σ_g'de $m>0$ tane knotoid komponenti olan bir linkoid ise,

$$\boxed{f-n = 2-2g-m}$$ ' dir.

$g=2$



K: Kishino düğümü

$f-n=2-2g$

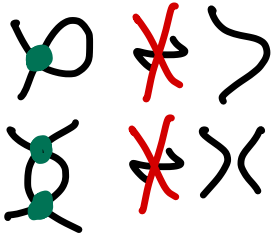
$\Rightarrow f-n=-2$

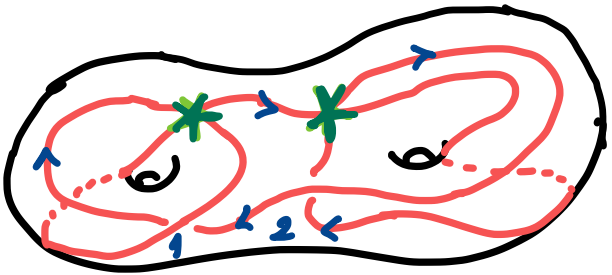
ie

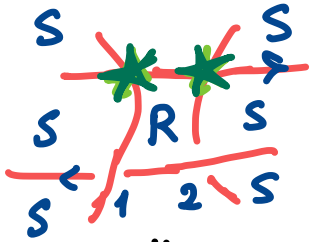
$n=f+2.$

$\Rightarrow$ 2 tane karşılaşma noktasını yıldızla!

NOT:







$$\Downarrow$$

$$\nabla_{K^*} = s^2 - s^{-2} - 2(s-s^{-1}) \Leftarrow M(K) = \begin{array}{c|cc} & R & S \\ \hline 1 & -s & 2-s^{-1} \\ 2 & -s^{-1} & -s+2 \end{array}$$

Sorular ve Spekülasyonlar

1) **Fox-Milnor Teoremi:**

K, slice bir düğüm olsun. O halde, bir f polinomunu kullanarak ∇_K'yı bir çarpım halinde yazabiliriz:

$$\nabla_K(s) = f(s)\, f(s^{-1}).$$

Bu teorem Seifert pairing kullanılarak ispatlanır. Faz-toplamını kullanan bir ispat verilebilir mi? Eğer verilirse, bu teorem diğer kategorilere de genişletilebilir mi?

2) Knotoidler ve diğer yıldız düğümlü objelerin genelleştirilmiş Alexander polinomu, bir matrisin permanent'i olarak verildiğinden, hesaplamasının NP-hard olduğunu tahmin ediyoruz.

3) Bir knotoid'in fazları ile bir homoloji zincir kompleksi oluşturulup, knotoidler için bir homoloji üretilebilir.

Referanslar

1.) J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. Amer. Math. Soc., 30 (1923)

2.) J. H. Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, 1970

3.) L. H. Kauffman, Formal Knot Theory, 1983

4.) V. Turaev, Knotoids, Osaka J Math., 2012

5.) N. Gügümcü, L. H. Kauffman, Mock Alexander Polynomials, work in progress.

6.) N. Gügümcü, L. H. Kauffman, A generalization of Clock Theorem, work in progress.